具体数学：递归

首先是习题部分。

习题分为 Warmup、Basic、homework、exam、bonus 和 research，难度递增，（有的章节，比如这一章递归，没有 Basic）网友推荐做到 homework 就行了，但我的建议是，数学基础不是太好的人（比如我）做到 Warmup 或者 Basic 就行了。

总之开始吧，本文也会包含题目。

注意，这是一个笔记，不会像书里讲的那么详细，但价值是，会包含一些书里没有的补充视角。

习题之前

书里讲的汉诺塔比较常见，不说了。直线的平面划分问题比较好证（总能找到与所有直线相交的直线，这是无限对有限的降维打击），三角形的目前不会证，等习题做到再说。

然后就是约瑟夫函数，是这样一个形式的分段函数：

1. 对于 $1 \le i < d$，$f(i) = \alpha_i$
2. 对于 $i \ge d$ 的形式，把 i 分解为 $nd + l$ $(0 \le l < d)$，则 $f(nd+l) = cf(n) + \beta_l$

可以把自变量视为一个 d 进制的数，然后对于一个特定的自变量 $(b_m b_{m-1} \ldots b_1 b_0)_d$，$f((b_m b_{m-1} \ldots b_1 b_0)_d)$ 的计算过程就变为：

1. $f((b_m b_{m-1} \ldots b_1 b_0)_d)$
2. $c \times f((b_m b_{m-1} \ldots b_1)_d) + \beta_{b_0}$
3. $c^2 \times f((b_m b_{m-1} \ldots b_2)_d) + c \times \beta_{b_1} + \beta_{b_0}$
   等等等……最后一步形如：

$$c^m f((b_m)_d) + c^{m-1}\beta_{b_{m-1}} + \cdots + c\beta_{b_1} + \beta_{b_0}$$

最后的形式就是 $c^m \alpha_{b_m} + c^{m-1}\beta_{b_{m-1}} + \cdots + c\beta_{b_1} + \beta_{b_0}$

如果忽略进制每位的表示限制，就可以写成：$(\alpha_{b_m}\beta_{b_{m-1}} \cdots \beta_{b_1}\beta_{b_0})_c$ 这个形式，很简洁罢！（误

另外，有个一般性的解递归式的方法，比如给你一个：

1. $f(1) = \alpha$

2. $f(2n)=2f(n)+\beta$
3. $f(2n+1)=2f(n)+\gamma$

可以看到如果 f 存在一个封闭形式，那么其中只会涉及 α,β,γ 三个东西，只是系数不知道，所以可以列出：

$$f(n)=A(n)\cdot\alpha+B(n)\cdot\beta+C(n)\cdot\gamma$$

怎么解呢？我们现在只有这一个方程，还有 `1.2.3.` 三个 f 与 α,β,γ 的约束。
首先要解的只有 A,B,C，那么 f 和 α,β,γ 都可视作变量，只是需要符合 `1.2.3.` 这三个约束，比如可以设 $f(n)=1$，这样根据 `1.2.3.` 就得到 $(\alpha,\beta,\gamma)=(1,-1,-1)$，将 $[f(n),\alpha,\beta,\gamma]=(1,1,-1,-1)$ 再代入进 $f(n)=A(n)\cdot\alpha+B(n)\cdot\beta+C(n)\cdot\gamma$ 就可以得到纯粹由 A,B,C 构成的约束了。

类似地，设 $f(n)=n$，得到 $(\alpha,\beta,\gamma)=(1,0,1)$。

现在我们有两个方程了，分别是：

111. $A(n)-B(n)-C(n)=1$
112. $A(n)+C(n)=n$

这是两个约束，但也只是两个约束，我们至少需要解出 A,B,C 之中的至少一个确切值。

我们可以选择去解 $A(n)$，这个解出来有点复杂，读者可以不在意其具体的值，只关注解法便好。

首先对于 $f(n)=A(n)\cdot\alpha+B(n)\cdot\beta+C(n)\cdot\gamma$ 设 $(\alpha,\beta,\gamma)=(1,0,0)$ 得到 $A(n)=f(n)$，将 $[A(n),\alpha,\beta,\gamma]=[f(n),1,0,0]$ 带入 `1.2.3.`，就得到了

4. $A(1)=1$
5. $A(2n)=2A(n)$
6. $A(2n+1)=2A(n)$

这个解出来是 $A(2^m+l)=2^m$ （$0\le l<2^m$），并不是一个比较典型的封闭形式，但聊胜于无。

将解出来的 $A(n)$ 带入回方程 `111.` 和 `222.` 解出 $C(2^m+l)=l$，$B(2^m+l)=2^m-l+1$（$0\le l<2^m$）

这个方法叫 `repertoire method`，找不到确切的翻译。

其实还是有些地方要注意的，我们得出约束 `111.` 和 `222.` 的时候是从 $f(n)$ 开始的，因为一对特殊值 $[f(n),\alpha,\beta,\gamma]$ 必须满足 `1.2.3.` 这三个约束，否则解出来的就不会是正确的答案；另外我们求 $A(n)$ 的时候只对 (α,β,γ) 设了特殊值，没有对 $f(n)$ 设，一方面是你设了也不一定满足 `1.2.3.` 这三个约束，另一方面是，`1.2.3.` 中的变量只有 $[f(n),\alpha,\beta,\gamma]$，而 $A(n)$ 并不能和 (α,β,γ) 产生什么联系，它只能和 $f(n)$ 产生联系，产生联系了之后才能带入 `1.2.3` 求解。

另外，取特殊值之所以不会发生错误，是因为 $[f(n), \alpha, \beta, \gamma]$ 都是变量，$f(n) = A(n) \cdot \alpha + B(n) \cdot \beta + C(n) \cdot \gamma$ 中 A, B, C 的解必须要对所有可能的 $[f(n), \alpha, \beta, \gamma]$ 生效才行，所以取特殊值没啥问题。

Warmup 热身题

1. 在 $n = 2$ 的情况，$[2, n-1]$，即中间的马，是个空集，所以归纳不成立。
2. 首先，我们都能糊出来 $T_n \leq 3^n - 1$ 这个近似解，现在来证明这些步数是必要的，首先最大的盘子必须要先去中间的杆，所以必定要有一步 T_{n-1}，其次，最大的盘子要去终点，就必须还有一次 T_{n-1}，最后的 T_{n-1} 也是必要的，证毕。
3. 这个可以归纳证，首先 T_1 归纳基础是显然的，然后对于 T_n，按最大盘子在哪分类，我们通过第二题的过程可以发现不管最大盘在哪，都会有一次 T_{n-1} 的过程，也就是说归纳成立
4. 这个我其实是对着第三题和第二题的结论想不出来去看答案了，答案是归纳法，归纳基础 T_1 是显然的，然后对于 T_n，假如最大的盘不需要移动，就需要 T_{n-1} 也就是 $2^{n-1} - 1$ 步，假如需要移动，首先创造出移动的条件是 T_{n-1} 步，然后移动是一步，然后再移动 T_{n-1} 步，最后加起来是 $2(2^{n-1} - 1) + 1 = 2^n - 1$ 步，证毕
5. 按组合数 $1, 4, 6, 4, 1$ 加起来能知道确实可能能分成十六个范围（包括外面那个不闭合的），但实际上不行，因为一个圆与一个闭合空间需要有两个交点，但第四个圆与前三个圆最多有六个交点（因为两个圆之间最多有两个交点），实际上虽然相邻闭合空间能共享交点但也是不够分的，所以实验下来四个圆最多能划分 14 个空间（包括外面那个不闭合的）
6. $T_1 = T_2 = 0$，而对于 $n = 3$ 及以上的 T_n，答案是 $\dfrac{(n-2)(n-1)}{2}$。首先可以糊出来第 n 条直线打上去最多跟 $n-1$ 条线相交，创造 $n-2$ 个闭合空间，而因为我们的直线都是无限直线，所以所有的闭合空间都是凸多边形，所以新的直线打在凸多边形上就最多有两个交点，创造一个闭合空间，而这两个交点至少跟两条直线有关（相邻的凸多边形也是一样），由于不重合直线之间最多一个交点，所以并不会有 $n-2$ 以上的收益
7. $H(1) = 0$，证毕。